นสพ.เดลินิวส์ ฉบับวันศุกร์ที่ 24 มีนาคม 2560

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1 + 9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 9 (ตอนที่ 1/4)

โดยช่วงตั้งแต่ 7 มี.ค.-30 มิ.ย. 60 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัส+วันศุกร์

1. ให้ $A = \{a, b, c\}$ แล้วฟังก์ชัน $f : A \to A$ ซึ่ง $(f\circ f)(x) = x$ เมื่อ $x \in A$ มีทั้งหมดกี่ฟังก์ชัน

1) 3 2) 4
3) 6 4) 9

2. พาราโบลา $p(x) = ax^2 + bx + c$ มีจุดยอด $V(3, 3)$ ตัดกับพาราโบลา $y = x^2$ ที่จุดจุดเดียว a มีค่าเท่าใด

1) -1 2) $-\frac{3}{4}$
3) $\frac{3}{4}$ 4) $-\frac{1}{2}$

3. กำหนดให้ $f(3) = 0$, $f'(3) = 6$ ถ้า $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 8}}$ แล้ว $g'(3)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 8 2) 7
3) 6 4) 5

4. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y\sqrt{3 - x} = 1\}$

และ $s = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{25 - |5x|}\}$

แล้วจำนวนสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มของ $R_s - D_r$ เท่ากับเท่าใด

1) 2 2) 3
3) 4 4) 5

5. พิจารณาบริเวณต่อไปนี้

$R_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid 0 \le x \le 1 \text{ และ } 0 \le y \le 1\}$

$R_2 = \left\{(x, y) \in R \times R \,\middle|\, x^2 + y^2 \le \frac{4}{3}\right\}$

พื้นที่ของบริเวณ $R_1 \cap R_2$ สามารถเขียนในรูปแบบ $\dfrac{\mathbf{a}\sqrt{3} + \mathbf{b}\pi}{9}$ เมื่อ **a** และ **b** เป็นจำนวนเต็มแล้ว **a** + **b** มีค่าเท่าใด

1) 2 2) 3
3) 4 4) 5

เฉลย

1. เฉลย 2) 4

f จะต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง A เพราะถ้า $f(x) = y$ แล้ว $f(y) = x$ ไม่เช่นนั้นแล้ว f จะไม่มีสมบัติ $(f\circ f)(x) = x$

$f_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$, $f_2 = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$,

$f_3 = \{(a, c), (c, a), (b, b)\}$, $f_4 = \{(a, a), (b, c), (c, b)\}$

2. เฉลย 4) $-\frac{1}{2}$

เนื่องจาก พาราโบลา $p(x) = ax^2 + bx + c$ มีจุดยอด $V(3, 3)$

ดังนั้น $\frac{-b}{2a} = 3$ หรือ $b = -6a$ ...(1)

$a(3^2) + b(3) + c = 3$ หรือ $9a + 3b + c = 3$ ...(2)

แทนค่า $b = -6a$ ใน (2) จะได้

$9a + 3(-6a) + c = 3$ หรือ $c = 9a + 3$ ...(3)

จุดตัดของ $p(x) = ax^2 + bx + c$ และ $y = x^2$ มีพิกัด x สอดคล้องกับสมการ

$ax^2 + bx + c = x^2$ ...(4)

แทนค่า $b = -6a$ จาก (1) และ $c = 9a + 3$ จาก (3) ใน (4) จะได้

$$ax^2 + (-6a)x + (9a + 3) = x^2$$

$$(a - 1)x^2 + (-6a)x + (9a + 3) = 0 \quad ...(5)$$

พาราโบลา $p(x) = ax^2 + bx + c$ ตัดกับพาราโบลา $y = x^2$ ที่จุดจุดเดียว ก็ต่อเมื่อสมการ (5) มีคำตอบเดียว นั่นคือ

$$(-6a)^2 - 4(a - 1)(9a + 3) = 0$$
$$36a^2 - 4(9a^2 - 6a - 3) = 0$$
$$36a^2 - 36a^2 + 24a + 12 = 0$$
$$24a + 12 = 0$$
$$a = -\frac{1}{2}$$

3. เฉลย 3) 6

จาก $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 8}}$

ให้ $h(x) = \sqrt{x^2 - 8}$

จะได้ $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 8}} = \dfrac{f(x)}{h(x)}$

$$g'(x) = \frac{h(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$g'(3) = \frac{h(3)\cdot f'(3) - f(3)\cdot h'(3)}{(h(3))^2}$$

แทนค่า $h(3) = \sqrt{3^2 - 8} = 1$, $f'(3) = 6$ และ $f(3) = 0$

จะได้ $g'(3) = \dfrac{(1)\cdot(6) - (0)\cdot h'(3)}{(1)^2} = 6$ (สังเกตว่าเราไม่ต้องหาค่าของ $h'(3)$)

4. เฉลย 2) 3

ขั้นที่ 1 หา D_r

สังเกตว่า เราสามารถหาค่าของ $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 - x}}$ ได้เมื่อ $3 - x > 0$ หรือเมื่อ $x < 3$ ดังนั้น $D_r = (-\infty, 3)$

ขั้นที่ 2 หา R_s

สังเกตว่า $y = \sqrt{25 - |5x|}$ มีค่าเป็นจำนวนลบไม่ได้ ค่าต่ำสุดของ y คือ 0 (เมื่อ $x = \pm 5$) และค่าสูงสุดของ y คือ 5 (เมื่อ $x = 0$) ดังนั้น $R_s = [0, 5]$

ขั้นที่ 3 หา $R_s - D_r$

$R_s - D_r = [0, 5] - (-\infty, 3) = [3, 5]$

จำนวนเต็มในช่วง [3, 5] มี 3 จำนวนได้แก่ 3, 4 และ 5

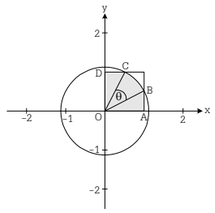
5. เฉลย 3) 4

R_1 คือ บริเวณภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ 1 หน่วยตั้งอยู่บนช่วง [0, 1] บนแกน x และบนช่วง [0, 1] บนแกน y

R_2 คือ บริเวณภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมียาว $\frac{2}{\sqrt{3}}$ หน่วย

$R_1 \cap R_2$ คือ บริเวณที่แรเงาในรูป ต่อไปนี้

พิกัด y ของจุด B หาได้จากการแก้ระบบสมการ $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$ และ $x = 1$



ซึ่งจะได้ $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

นั่นคือ พิกัดของจุด B เป็น $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

ดังนั้น พื้นที่ของ Δ OAB $= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{6}$ ตารางหน่วย

สังเกตว่า $\tan A\hat{O}B = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $A\hat{O}B = \frac{\pi}{6}$

อาศัยความสมมาตร เราจะได้ พื้นที่ของ Δ OCD $= \frac{\sqrt{3}}{6}$ ตารางหน่วย และ $C\hat{O}D = \frac{\pi}{6}$ ด้วย

เนื่องจาก $\theta = B\hat{O}C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

ดังนั้น พื้นที่ของเซกเตอร์ BOC $= \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= \frac{\pi}{9}$ ตารางหน่วย

และจะได้พื้นที่ของบริเวณที่แรเงา $R_1 \cap R_2$ เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{9}$

$= \frac{3\sqrt{3} + \pi}{9} = \frac{\mathbf{a}\sqrt{3} + \mathbf{b}\pi}{9}$

ดังนั้น $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 3 + 1 = 4$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaenaew.com